DS de mathématiques n°8

Polynômes, Fractions rationnelles, Équivalents, DL

Durée : **4h**. Calculatrices non autorisées.
La clarté du raisonnement et la lisibilité de la copie pourront faire varier la note de ± 1 point.
Les exercices sont de difficulté (plus ou moins) croissante et les premiers exercices rapportent plus de points (à difficulté égale) que les suivants.

Exercice 1 : calcul de DES

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes dans le corps indiqué :

$$F = \frac{X^3-1}{X^3+1} \quad \text{dans } \mathbb{R}(X) \qquad\qquad G = \frac{4X}{(X^2+1)^2} \text{ dans } \mathbb{C}(X)\text{, puis dans } \mathbb{R}(X)$$

Exercice 2 : Analyse asymptotique

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+3x)^{\frac{1}{3}} - 1 - \sin x}{1-\cos x}$

2) **a)** Donner le $\mathrm{DL}_7(0)$ de la fonction arctangente.

b) Justifier que la fonction tangente admet un $\mathrm{DL}_7(0)$ et donner une forme de ce DL qui fait apparaitre seulement 4 coefficients inconnus (en justifiant pourquoi).

c) En utilisant les questions précédentes et le fait que $\tan(\arctan x) = x$, déterminer le $\mathrm{DL}_7(0)$ de la fonction tangente.

d) En déduire $\tan^{(k)}(0)$ pour tout $k \in [\![1, 7]\!]$.

3) Déterminer le $\mathrm{DL}_{16}(0)$ de $(\mathrm{sh}x - \sin x)^2 (\tan x - \mathrm{th}x)^3$.

4) Déterminer un équivalent de $x\ln(x+1) - (x+1)\ln x$ en $+\infty$. En déduire un développement asymptotique à 3 termes de cette expression en $+\infty$.

Exercice-Problème 3 : Polynômes de Legendre

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$U_n = (X^2-1)^n \qquad \text{et} \qquad L_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}$$

Enfin, on notera a_n le coefficient dominant de L_n.

1) **a)** Déterminer L_0, L_1 et vérifier que $L_2 = \dfrac{1}{2}(3X^2-1)$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que L_n est de degré n, et déterminer le coefficient a_n.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les racines de U_n, et préciser leurs multiplicités.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (x^2-1)^n$.

a) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et montrer qu'il existe $c \in]-1, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

b) En déduire qu'il existe $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$U_n' = \alpha_1 (X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-c)$$

3) Dans cette question seulement, on suppose $n \geq 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'il existe $\alpha_k \in \mathbb{R}$ et des réels $c_1 < \ldots < c_k$ dans $]-1,1[$ tels que :

$$U_n^{(k)} = \alpha_k (X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-c_1)\cdots(X-c_k)$$

On note de plus $c_0 = -1$ et $c_{k+1} = 1$. Justifier qu'il existe des réels $d_1 < \ldots < d_k$ dans $]-1,1[$ tels que

$$U_n^{(k+1)} = \alpha_{k+1}(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-d_1)\cdots(X-d_{k+1})$$

4) En déduire que L_n est scindé à racines simples, toutes dans $]-1,1[$.

Exercice 4 : Un calcul de DES par un calcul de DL

On souhaite calculer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de la fraction suivante F :

$$F(X) = \frac{1}{(X^3-1)^3}$$

On remarque que 1 est un pôle de F.

1) Factoriser $\left(X^3-1\right)^3$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$. On posera $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Dans la suite, on pose Q le polynôme *réel* tel que $(X^3-1)^3 = (X-1)^3 Q$.

2) Déterminer le DL à l'ordre 2 au point 1 de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{Q(x)}$ (avec $x \in \mathbb{R}$).

3) En déduire l'équation de la tangente en 1 à la courbe de g ainsi que leurs positions relatives.

4) Pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, donner la forme de la DES de $\dfrac{1}{F(x)}$ sur $\mathbb{C}$, sans déterminer les coefficients.

5) En utilisant la question **2)**, calculer les coefficients des fractions dont 1 est le pôle.

6) En utilisant le fait que $F(jX) = F(j^2X) = F(X)$, déterminer les autres coefficients. On précisera l'argument utilisé.

Exercice 5 : Polynômes divisibles par leur dérivée première

Dans cet exercice, on cherche tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P dans $\mathbb{C}[X]$.

1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que si P a exactement k racines distinctes dans $\mathbb{C}$, alors $P \wedge P'$ est de degré $n-k$.

2) En déduire tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P dans $\mathbb{C}[X]$.

3) Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que P' divise P dans $\mathbb{R}[X]$.
Lucena, élève en MPSI, vous met en garde : la question **2)** *ne permet pas de conclure immédiatement car elle conduit au fait que* $P = Q_1 P'$ *avec* $Q_1 \in \mathbb{C}[X]$*... Or, on souhaite avoir* $P = Q_2 P'$ *avec* $Q_2 \in \mathbb{R}[X]$*, et on ne peut pas poser* $Q_2 = Q_1$ *a priori...*

Un père matheux dit à son fils : "Si tu ne manges pas tes légumes, tu n'auras pas de dessert !". L'enfant mange ses légumes, et exige ensuite un dessert. Son père répond : "Rien ne m'y oblige car non$P \implies$ non$Q$ ne veut pas dire la même chose que $P \implies Q$... Hé hé hé..."